УДК 681.3.01:519.67

М.В. Полякова
Одесский национальный политехнический университет, Украина
marina_polyakova@rambler.ru

Регуляризация дифференцирования с использованием репагулярного вейвлет-преобразования

В статье рассматривается проблема регуляризации дифференцирования изображений с помощью репагулярного вейвлет-преобразования, для решения которой выполняется представление этого преобразования с помощью интегрирования дробного порядка.

Введение

Одной из базовых процедур в системе компьютерного распознавания зрительных образов является сегментация изображений на однородные по какому-либо признаку или набору признаков области (сегменты). Целью этой процедуры является уменьшение объема обрабатываемой при распознавании информации за счет выделения границ однородных областей. Составной частью процедуры сегментации изображений является подчеркивающее преобразование, задача которого – концентрация энергии сигнала вблизи границ сегментов. Именно подчеркивающее преобразование определяет главным образом помехоустойчивость процедуры сегментации и погрешность выделения границ однородных областей. Кроме того, при распознавании иерархических объектов, т.е. имеющих структуру «объект-подобъект», а также при анализе сцен подчеркивающее преобразование позволяет выделять объекты требуемых геометрических размеров. Для таких задач требования к помехоустойчивости процедуры сегментации и погрешности выделения границ объектов зависят от уровня иерархии последних.

В составе преобразования, подчеркивающего перепады значений признака сегментации, часто используется дифференцирование. Задача дифференцирования изображений является некорректной [1], [2]. Чтобы избежать проблем, связанных с некорректностью задачи дифференцирования, последнее выполняют в пространстве обобщенных функций. Для этого производят свертку изображения, подлежащего дифференцированию, с гладкой основной функцией, которая дифференцируется перед выполнением свертки. Такая последовательность действий реализуется несколькими концептуально различными способами.

1. Строится гауссовское масштабно-пространственное представление изображения, т.е. однопараметрическое семейство сглаженных изображений, линии уровня которых являются выпуклыми. Деталям изображений большого масштаба соответствуют детали изображений малого масштаба, причем это соответствие устанавливается с помощью гауссиана. Гладкость гауссиана позволяет определить в смысле обобщенных функций производные изображения, для которого построено масштабно-пространственное представление.

2. Используется регуляризация по Тихонову, т.е. ищется дифференцируемая функция, близкая в смысле некоторого критерия к изображению признака сегментации. Минимизация соответствующего критерию функционала производится с помощью регуляризации, учитывающей порядок производной.

3. Применяется линейная фильтрация, реализующая дифференцирование, для подчеркивания перепадов значений признака сегментации. Обычно предполагается, что задана модель перепада значений признака сегментации, а также критерий качества подчеркивания перепада [3].

В работе [4] выведена взаимосвязь между дифференцированием с помощью регуляризации по Тихонову и гауссовским масштабно-пространственным представлением, а также показано, что фильтры Канни-Дерича могут применяться для решения задачи регуляризации дифференцирования.

В случае иерархической структуры объекта распознавания для получения масштабно-пространственного представления в [5] применялось репагулярное вейвлет-преобразование (ВП). Это преобразование определено в [6] как свертка строк или столбцов изображения с функцией $\psi(x,a)=\begin{cases}|x|^{-a}\operatorname{sgn}x, & |x|\le\varepsilon_a;\\ 0, & |x|>\varepsilon_a,\end{cases}$ где ε_a – фиксированное число, зависящее от $a\in(0,1)$ – параметра преобразования. Параметр a репагулярного ВП определяет соотношение между помехоустойчивостью и погрешностью выделения перепадов значений признака сегментации. Применение репагулярного ВП для подчеркивания перепадов значений признака сегментации позволило достичь более высокой помехоустойчивости по сравнению с применением дифференцирования [6]. Поэтому целесообразным является представление результата репагулярного ВП как регуляризованного решения задачи дифференцирования.

Математический аппарат, используемый в данной работе, – операции дифференцирования и интегрирования дробного порядка, которые представляют собой более общий подход к подчеркиванию перепадов значений признака сегментации, включающий и обычное дифференцирование. Эти операции использовались наряду с обычным дифференцированием в ряде работ [7], [8] для подчеркивания перепадов интенсивности и других задач обработки изображений.

Целью данной работы является доказательство того, что применение репагулярного ВП осуществляет регуляризацию дифференцирования. Для этого выполняется представление репагулярного ВП с помощью интегрирования дробного порядка.

Представление репагулярного вейвлет-преобразования с помощью интегрирования дробного порядка

Определение интегралов и производных дробного порядка зависит от свойств функции, стоящей под знаком производной или интеграла, а также от области определения этой функции. В качестве области определения функции, стоящей под знаком производной или интеграла, рассматривают конечный отрезок, полуось или ось. Предполагают, что функция, стоящая под знаком дробной производной или интеграла, является интегрируемой по Лебегу или обобщенной.

В данной работе дифференцирование или интегрирование дробного порядка применяется к функции $g(x)$, представляющей значения признака сегментации (например, интенсивности) строки или столбца изображения. Предположим, что эта функция задана на конечном отрезке $[a,b]$ и может быть нулями дополнена на всю вещественную ось так, чтобы интегралы, участвующие в определении дробных производных, сходились на бесконечности и в точках отрезка $[a,b]$. Например, выберем $g(x)\in L_p(R)$, где $1\le p<1/\alpha$, α – порядок дробной производной или интеграла.

Дробные производные на всей вещественной оси вводятся в [9] следующим образом. Выражение

$$(D_+^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{g(t)dt}{(x-t)^\alpha}, \ -\infty < x < \infty$$

называется левосторонней дробной производной порядка α, а выражение

$$(D_-^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{\infty} \frac{g(t)dt}{(x-t)^\alpha}, \ -\infty < x < \infty$$

– правосторонней дробной производной порядка α, $0 < \alpha < 1$.

Для $\alpha \geq 1$ полагают

$$(D_\pm^\alpha g)(x) = \frac{(\pm 1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^\infty t^{n-\alpha-1} g(x \mp t)dt, \ n = [\alpha] + 1.$$

Дробные интегралы в случае вещественной оси обозначаются как

$$\left(I_+^\alpha g\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \ -\infty < x < \infty,$$

$$\left(I_-^\alpha g\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{g(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \ -\infty < x < \infty,$$

и называются интегралами дробного порядка $\alpha > 0$, соответственно, левосторонним и правосторонним.

Эти интегралы определены, например, на функциях $g(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ при $0<\alpha<1$ и $1 \leq p < 1/\alpha$.

Представим репагулярное ВП в терминах дробного интегрирования по всей вещественной оси.

$$\left(T^{rep} g\right)(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)dt}{|x-t|^\alpha \operatorname{sgn}(x-t)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{g(t)dt}{|x-t|^\alpha \operatorname{sgn}(x-t)} + \int_{x}^{\infty} \frac{g(t)dt}{|x-t|^\alpha \operatorname{sgn}(x-t)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{g(t)dt}{(x-t)^\alpha} - \int_{x}^{\infty} \frac{g(t)dt}{(t-x)^\alpha} = \Gamma(\alpha)\left(I_+^{1-\alpha} g\right)(x) - \Gamma(\alpha)\left(I_-^{1-\alpha} g\right)(x).$$

В частотной области репагулярное ВП в терминах дробного интегрирования записывается с помощью формул преобразования Фурье дробного интеграла:

$$F\left(I_+^{1-\alpha} g\right)(\omega) = \hat{g}(\omega) / (-i\omega)^{1-\alpha}, \ 0 < 1-\alpha < 1, \quad (1)$$

$$F\left(I_-^{1-\alpha} g\right)(\omega) = \hat{g}(\omega) / (i\omega)^{1-\alpha}, \ 0 < 1-\alpha < 1, \quad (2)$$

где $(\pm i\omega)^\beta = |\omega|^\beta e^{\pm \frac{\beta\pi i}{2} \operatorname{sgn}\omega}$, β – вещественное число, которое в данном случае равно $1-\alpha$, F – оператор преобразования Фурье.

С учетом формул (1), (2) репагулярное ВП в частотной области имеет вид:

$$F\left((T^{rep} g)(x,\alpha)\right) = F\left(\Gamma(\alpha)\left(I_+^{1-\alpha} g\right)(x) - \Gamma(\alpha)\left(I_-^{1-\alpha} g\right)(x)\right) = \Gamma(\alpha)\frac{\hat{g}(\omega)}{(-i\omega)^{1-\alpha}} - \Gamma(\alpha)\frac{\hat{g}(\omega)}{(i\omega)^{1-\alpha}}. \quad (3)$$

Обозначим результат репагулярного ВП функции $\mathrm{g(x)}$ через $\mathrm{f(x)}$:

$$\mathrm{f(x)} = \left(\mathrm{T^{rep} g}\right)(\mathrm{x}, \alpha).$$

Тогда формулу (3) в частотной области можно переписать в виде:

$$\hat{f}(\omega) = \Gamma(\alpha)\hat{g}(\omega)\left(\frac{1}{(-i\omega)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(i\omega)^{1-\alpha}}\right).$$

Преобразуем $\hat{f}(\omega)$ т. о., чтобы в сумме осталось только одно слагаемое:

$$\hat{f}(\omega)=\left(|\omega|^{-(1-\alpha)}e^{\frac{(1-\alpha)\pi i}{2}\operatorname{sgn}\omega}-|\omega|^{-(1-\alpha)}e^{\frac{-(1-\alpha)\pi i}{2}\operatorname{sgn}\omega}\right)\cdot\hat{g}(\omega)\Gamma(\alpha)=$$

$$=\sin\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)\cdot 2i\cdot\hat{g}(\omega)\Gamma(\alpha)\cdot|\omega|^{-(1-\alpha)}e^{\frac{i(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega}\cdot e^{\frac{-i(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega}= \tag{4}$$

$$=(-i\omega)^{-(1-\alpha)}\cdot\hat{g}(\omega)\cdot e^{\frac{-i(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega}\cdot\sin\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)\cdot 2i\cdot\Gamma(\alpha).$$

Учитывая формулы (1), (2), получаем:

$$\hat{f}(\omega)=\Gamma(\alpha)F\left(I_+^{(1-\alpha)}g\right)\left(\cos\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)-i\sin\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)\right)\times\sin\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)\cdot 2i=$$

$$=\Gamma(\alpha)F\left(I_+^{(1-\alpha)}g\right)\cdot\hat{h}_0(\omega), \tag{5}$$

где $\hat{h}_0(\omega)=2\sin^2\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)+i\sin\left((1-\alpha)\pi\operatorname{sgn}\omega\right)$.

В пространственной области

$$h_0(x)=2\sin^2\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\delta(x)-2\frac{\sin((1-\alpha)\pi)}{x}.$$

Регуляризованное решение задачи дифференцирования изображения с применением репагулярного вейвлет-преобразования

В [1] показано, что задача дифференцирования функции $g(x)$, известной приближенно, является существенно некорректной. Для решения существенно некорректных задач применяются методы регуляризации [1].

Покажем, что регуляризованное решение задачи дифференцирования функции $g(x)$, известной приближенно, может быть получено в результате применения репагулярного ВП. В процессе этой операции производится дифференцирование регуляризованного сигнала изображения.

Использование регуляризации в случае численного дифференцирования заключается в интерполяции и аппроксимации данных некоторой функцией с последующим вычислением производных этой функции [2]. Предположим, что интерполяционная или аппроксимирующая функция $u(x)$ для значений строки или столбца изображения такова, что $u'(x)=f(x)$. Тогда $(D_+^1u)(x)=f(x)$. Следовательно,

$$\hat{f}(\omega)=(-i\omega)\hat{u}(\omega). \tag{6}$$

Используя соотношения (4) – (6), сформулируем следующую теорему.

Теорема. Если функционал

$$E[\hat{u}(\omega)]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega)+\lambda(-i\omega)^{(2-\alpha)}\hat{h}(\omega)\hat{u}^2(\omega)\right)d\omega,$$

где параметр λ>0 достигает экстремума при $\hat{u}(\omega)=\hat{u}_0(\omega)$, то в пространственной области $u_0(x)$ может быть представлена как линейная свертка функции $g(x)\in L_1(R)$

с импульсной характеристикой фильтра $\mathrm{H(x)}$, которой в частотной области соответствует передаточная функция

$$\hat{H}(\omega)=\frac{2}{\lambda}(-i\omega)^{-(2-\alpha)}\hat{h}_0(\omega),$$

где $\hat{h}_0(\omega)=2ie^{\frac{-(1-\alpha)\pi i}{2}\operatorname{sgn}\omega}\sin\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)$.

Доказательство. Из представления (5) следует, что

$$\hat{f}(\omega)=\Gamma(\alpha)F(I_+^{(1-\alpha)}g)(\omega)\hat{h}_0(\omega)=\Gamma(\alpha)(-i\omega)^{-(1-\alpha)}\hat{g}(\omega)\hat{h}_0(\omega). \qquad (7)$$

Подставив в (7) соотношение (6), получаем

$$-\hat{g}(\omega)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(-i\omega)^{(1-\alpha)}\hat{h}(\omega)(-i\omega)\hat{u}(\omega)=0, \qquad (8)$$

где $\hat{h}(\omega)=\hat{h}_0^{-1}(\omega)$.

Уравнение (8) представляет собой условие равенства нулю первой вариации функционала

$$E[\hat{u}(\omega)]=\int_{-\infty}^{\infty}(-\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega)+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}(-i\omega)^{2-\alpha}\hat{h}(\omega)\hat{u}^2(\omega))d\omega, \qquad (9)$$

т.к.

$$0=\frac{dE}{d\hat{u}}\Big|_{\hat{u}(\omega)=\hat{u}_0(\omega)}=\left(-\hat{g}(\omega)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(-i\omega)^{(2-\alpha)}\hat{h}(\omega)\hat{u}(\omega)\right)\Big|_{\hat{u}(\omega)=\hat{u}_0(\omega)},$$

где $\hat{u}_0(\omega)$ – функция, на которой функционал (9) достигает экстремума. Последняя может быть получена путем умножения преобразования Фурье $\hat{g}(\omega)$ исходной функции $\mathrm{g(x)}$ на $\hat{H}(\omega)=\Gamma(\alpha)(-i\omega)^{-(2-\alpha)}\hat{h}_0(\omega)$.

Обозначим $\lambda=\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}$. Заметим, что $\lambda>0$, в случае $\alpha>0$. Тогда (9) принимает вид:

$$E[\hat{u}(\omega)]=\int_{-\infty}^{\infty}(-\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega)+\lambda(-i\omega)^{2-\alpha}\hat{h}(\omega)\hat{u}^2(\omega))d\omega, \qquad (10)$$

а $\hat{H}(\omega)=\frac{2}{\lambda}(-i\omega)^{-(2-\alpha)}\hat{h}_0(\omega)$. Теорема доказана.

Функционал (10) является результатом формирования целевой функции задачи оптимизации в области преобразования Фурье. Покажем, что этот функционал принимает вещественные значения. По аналогии с доказательством предложения 1 работы [4] предположим, что результат $\hat{g}(\omega)$ преобразования Фурье исходной функции $g(x)$ является вещественным, а функция $g(x)$ симметрична относительно начала координат. Так, если $g(x)$ представляет значения признака сегментации строки или столбца изображения, ее можно продолжить симметрично относительно начала координат. При таком предположении функция $f(x)$ как результат репагулярного ВП $g(x)$ антисимметрична относительно начала координат. Следовательно, преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$ функции $f(x)$ является чисто мнимым. Тогда согласно (6) функция $\hat{u}(\omega)$ принимает вещественные значения. Выражение $(-i\omega)^{1-\alpha}\hat{h}(\omega)$ также является чисто мнимым потому, что

$$(-i\omega)^{1-\alpha}\hat{h}(\omega)=\frac{(-i\omega)^{1-\alpha}}{\hat{h}_0(\omega)}=\frac{(-i\omega)^{1-\alpha}}{2ie^{\frac{-(1-\alpha)\pi i}{2}\operatorname{sgn}\omega}\sin\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)}=-i\frac{|\omega|^{1-\alpha}}{2\sin\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)}.$$

Тогда выражение $(-i\omega)^{2-\alpha}\tilde{h}(\omega)$ вещественно, т.к.

$$(-i\omega)^{2-\alpha}\tilde{h}(\omega)=(-i\omega)(-i\omega)^{1-\alpha}\tilde{h}(\omega)=-\omega\frac{|\omega|^{1-\alpha}}{2\sin\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)}.$$

Следовательно, функционал (10) принимает вещественные значения и его оптимизация проводится в пространстве вещественных чисел.

В процессе доказательства теоремы было получено выражение для функционала в частотной области, экстремум которого достигается на функции $\tilde{u}_0(\omega)$. Результатом обратного преобразования Фурье от $\tilde{u}_0(\omega)$ является функция $u_0(x)$ в пространственной области. Получим выражение для функционала в пространственной области, экстремум которого достигается на функции $u_0(x)$.

Согласно равенству Парсеваля [10] для функций $q(x)$, $v(x)$ и результатов преобразования Фурье этих функций имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x)v(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{q}(\omega)\overline{\tilde{v}(\omega)}d\omega, \qquad (11)$$

где черта над функцией означает комплексно-сопряженную величину. Равенство Парсеваля выполняется при условии, что $q(x)$, $v(x)$, $\tilde{q}(\omega)$, $\tilde{v}(\omega)$ интегрируемы с квадратом на оси *R*.

Применим равенство Парсеваля к (10). Сначала предположим, что $\tilde{q}(\omega)=\tilde{g}(\omega)$, а $\overline{\tilde{v}(\omega)}=\tilde{u}(\omega)$. Так как $\tilde{u}(\omega)$ – вещественная функция, то $\tilde{v}(\omega)=\tilde{u}(\omega)$, а $q(x)=g(x)$ и $v(x)=u(x)$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{q}(\omega)\overline{\tilde{v}(\omega)}d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}q(x)v(x)dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}g(x)u(x)dx. \qquad (12)$$

Далее применим (11) ко 2-му слагаемому в (10). Полагая $\tilde{q}(\omega)=\lambda(-i\omega)^{2-\alpha}\tilde{u}^2(\omega)$, а $\overline{\tilde{v}(\omega)}=\tilde{h}(\omega)$, имеем $q(x)=\lambda\left(D_+^{1-\alpha/2}u\right)^2(x)$, $\tilde{v}(\omega)=\overline{\tilde{h}(\omega)}$.

Получим представление функции $\tilde{h}(\omega)$ в пространственной области. Для этого преобразуем $\tilde{h}(\omega)$ следующим образом.

$$\tilde{h}(\omega)=\tilde{h}_0^{-1}(\omega)=e^{i\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega}\sin^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)\frac{1}{2i}=2\left(1-i\,ctg\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)\right). \qquad (13)$$

Тогда $h(x)=2\delta(x)+\frac{4}{x}ctg\frac{(1-\alpha)\pi}{2}-2i$.

С учетом (13) функция $\overline{\tilde{h}(\omega)}$ в пространственной области имеет вид:

$$F^{-1}(\overline{\tilde{h}(\omega)})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\left(1+i\,ctg\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega\right)\right)e^{i\omega x}dx=2\delta(x)-\frac{4}{x}ctg\frac{(1-\alpha)\pi}{2}+2i. \qquad (14)$$

Используя (14) для 2-го слагаемого в (10), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}(-i\omega)^{2-\alpha}\tilde{u}^2(\omega)\tilde{h}(\omega)d\omega=$$
$$=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\left(D_+^{1-\alpha/2}u\right)^2(x)\left(2\delta(x)-\frac{4}{x}ctg\frac{(1-\alpha)\pi}{2}+2i\right)dx. \qquad (15)$$

Подставляя (12) и (15) в (10), имеем

$$E[u(x)] = -2\pi\int_{-\infty}^{\infty} u(x)g(x)dx + 2\pi\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)\left(2\delta(x) - \frac{4}{x}ctg\frac{(1-\alpha)\pi}{2} + 2i\right)dx =$$

$$= -2\pi\int_{-\infty}^{\infty} u(x)g(x)dx + 4\pi\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)\delta(x)dx - 8\pi\lambda ctg\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)\frac{1}{x}dx +$$

$$+ i4\pi\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)dx.$$

С учетом известного соотношения [10] $\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\delta(x)dx = v(0)$, где $v(x)$ – некоторая функция, $E[u(x)]$ принимает вид:

$$E[u(x)] = -2\pi\int_{-\infty}^{\infty} u(x)g(x)dx + 4\pi\lambda\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(0) - 8\pi\lambda ctg\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)\frac{1}{x}dx +$$

$$+ i4\pi\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)dx.$$

Введем параметр $\lambda_0 = 2i\lambda\mu$, где μ – чисто мнимое число, такое, что $Im\,\mu \le 0$. Тогда $\lambda_0 \ge 0$, причем $\lambda_0 \in R$. Видоизмененный с учетом значения λ_0 функционал $E[u(x)]$ обозначим $E_1[u(x)]$. Он имеет вид:

$$E_1[u(x)] = -2\pi\int_{-\infty}^{\infty} u(x)g(x)dx + 2\lambda_0\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)dx + 4\lambda\pi\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(0) -$$
$$-8\pi\lambda\, ctg\frac{(1-\alpha)\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)\frac{1}{x}dx. \quad (16)$$

Интерпретация подчеркивающего преобразования как результата регуляризации задачи дифференцирования изображения

Методы регуляризации в задаче сегментации изображения используются с целью избежать некорректности решения, вызванной наличием шума. Это происходит, когда область значений подчеркивающего преобразования изображения не замкнута или когда задача является существенно некорректной. Последнее означает, что изменения правой части операторного уравнения задачи обработки изображения, связанные с наличием шума, могут выходить за пределы образа множества исходных изображений при отображении его упомянутым оператором. Так как изображение неизбежно содержит шум, методы регуляризации являются хорошим инструментом для решения задачи сегментации изображений.

Основная идея метода регуляризации Тихонова заключается в том, что вводится последовательность непрерывных приближений не непрерывного оператора. Регуляризация обобщенного решения осуществляется через однопараметрическое семейство непрерывных операторов R_{λ_0}, $\lambda_0 > 0$, таких, что при $\lambda_0 \to 0$ $R_{\lambda_0}g(x)$ стремится к обобщенному решению. Применение R_{λ_0} к незашумленному изображению дает приближенное решение, которое улучшается при $\lambda_0 \to 0$ с точки зрения качества приближения. Однако если изображение содержит шум, имеем $R_{\lambda_0}g_{\varepsilon}(x) = R_{\lambda_0}g(x) + R_{\lambda_0}n_{\varepsilon}(x)$, где

$g_\varepsilon(x) = g(x) + n_\varepsilon(x)$, $n_\varepsilon(x)$ – шум. Слагаемое $R_{\lambda_0} n_\varepsilon(x)$, отвечающее за распространение ошибки приближения, расходится при $\lambda_0 \to 0$. Поэтому вводится функционал $\Phi(g_\varepsilon(x)) + \lambda \Psi(g_\varepsilon(x))$ и метод регуляризации путем выбора параметра λ_0 выполняет согласование между качеством приближения, определяемым слагаемым $\Phi(g_\varepsilon(x))$, и распространением ошибки, выражаемым слагаемым $\Psi(g_\varepsilon(x))$.

Доказанное в этой работе предложение утверждает, что проинтегрированный результат репагулярного ВП исходного изображения доставляет минимум функционалу (16), представляющему целевую функцию оптимизационной задачи на безусловный экстремум. Представим эту задачу на безусловный экстремум как результат применения метода неопределенных множителей Лагранжа к вариационной задаче на условный экстремум. Тогда последняя реализует вариационный принцип отбора возможных решений для метода регуляризации, применяемого к некорректной задаче дифференцирования изображений. Сформулируем вариационную задачу на условный экстремум, для которой функционал (16) представляет собой функцию Лагранжа. Для этого заметим, что минимизация скалярного произведения $-2\pi \int_{-\infty}^{\infty} u(x) g(x) dx$ по $u(x)$ может проводиться путем минимизации квадрата евклидового расстояния между этими функциями. Известно, что репагулярные вейвлет-функции характеризуются разной регулярностью, охватывая диапазон от производной дельта-функции $\delta'(x)$ до функции Хевисайда $\theta(x)$ [11]. Путем свертки с $\delta'(x)$ осуществляется обработка изображения в дифференциальных методах контурной сегментации, тогда как $\theta(x)$ является моделью перепада интенсивности для корреляционно-экстремальных методов.

В данной работе предполагалось, что исходная функция $g(x)$ представляет строку или столбец изображения, а $f(x)$ – результат репагулярного ВП функции $g(x)$. Тогда перепадам значений признака сегментации функции $g(x)$ соответствуют пики $f(x)$, ширина которых зависит от значения α, параметра репагулярного ВП.

Функция $u(x)$ определяет проинтегрированный результат репагулярного ВП. Поэтому перепадам значений признака сегментации функции $g(x)$ соответствуют сглаженные перепады значений признака сегментации $u(x)$. Чем шире пики $f(x)$, тем более сглаженной является функция $u(x)$ и выше значение $-2\pi \int_{-\infty}^{\infty} u(x) g(x) dx$. В этом случае результат репагулярного ВП приближается к результату согласованной фильтрации. Следовательно, слагаемое $-2\pi \int_{-\infty}^{\infty} u(x) g(x) dx$ при минимизации функционала (16) определяет качество приближения функции $g(x)$ функцией $u(x)$. Последнее влияет на такую характеристику подчеркивающего преобразования, как погрешность определения координат точек перепадов значений признака сегментации изображения.

Известно, что функция Лагранжа строится для оптимизационной задачи с ограничениями в виде равенств. В процессе определения вида этих ограничений, прежде всего, слагаемому $8\pi\lambda \, ctg \frac{(1-\alpha)\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(D_+^{1-\alpha/2} u \right)^2 (x) \frac{1}{x} dx$ поставим в соответствие ограничение $\int_{-\infty}^{\infty} \left(D_+^{1-\alpha/2} u \right)^2 (x) \frac{1}{x} dx = 0$.

Это условие означает, что квадрат левосторонней дробной производной от проинтегрированного результата подчеркивающего преобразования должен затухать на бесконечности, убывать в окрестности нуля, а также должен быть симметричным относительно начала координат. Тогда, с точки зрения обработки изображения, пиксели, расположенные по обе стороны контура, равноценны.

Условие убывания квадрата левосторонней дробной производной от проинтегрированного результата подчеркивающего преобразования в окрестности нуля позволяет, приравняв 3-е слагаемое функционала (16) к нулю, сформулировать ограничение $\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(0)=0$.

Значение слагаемого $2\lambda_0\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)dx$ возрастает при уменьшении ширины пиков результата репагулярного ВП функции $g(x)$. Тогда это слагаемое определяет распространение ошибки приближения функции $g(x)$ функцией $u(x)$ и влияет на помехоустойчивость подчеркивающего преобразования.

Слагаемое $2\lambda_0\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)dx$ в выражении (16) представляет собой стабилизирующий функционал при вариационном подходе к регуляризации задачи дробного дифференцирования изображений. Это обусловлено тем, что $\left(D_{+}^{1-\alpha/2}u\right)^{2}(x)\geq 0$ и $\lambda_0\geq 0$ как неопределенный множитель Лагранжа. Вариационный принцип отбора возможных решений задачи регуляризации осуществляется путем минимизации именно стабилизирующего функционала, который интерпретируется как условие гладкости проинтегрированного результата подчеркивающего преобразования вдоль контуров объектов на изображении. Физическим основанием для этого условия является то, что в силу свойств процесса обработки незашумленному изображению соответствует ограниченный спектр и, следовательно, оно имеет ограниченную производную [2].

Выводы

Получено представление репагулярного ВП с помощью интегрирования дробного порядка. Доказано, что применение репагулярного ВП осуществляет регуляризацию дифференцирования изображения. Следовательно, рассматриваемое преобразование может использоваться для подчеркивания границ однородных областей при построении методов сегментации изображений в задачах распознавания иерархических объектов, а также при анализе сцен. Направлением дальнейших исследований предполагается построение масштабно-пространственного представления изображений с применением репагулярного ВП.

Литература

1. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 285 с.
2. Бертеро М. Некорректные задачи в предварительной обработке визуальной информации / М. Бертеро, Т.А. Поджо, В. Торре // ТИИЭР. – 1988. – Т. 76, № 8. – С. 17-40.
3. Canny J.E. A computational approach to edge detection / J.E. Canny // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1986. – № 8. – P. 679-698.
4. Nielsen M. Regularization, scale-space and edge detection filters / M. Nielsen, L. Florack, R. Deriche // J. Math. Imag. Vision. – 1997. – Vol. 7, № 4. – P. 291-307.

5. Полякова М.В. Линейное масштабно-пространственное представление изображений с помощью вейвлет-преобразования / М.В. Полякова, В.Н. Крылов, Н.А. Гуляева // Искусственный интеллект. – 2008. – № 4. – С. 776-784.
6. Полякова М.В. Морфологический метод контурной сегментации изображений на основе репагулярного вейвлет-преобразования / М.В. Полякова, В.Н. Крылов // Труды Одес. политех. ун-та. – Одесса, 2006. – Вып. 1 (25). – С. 98-103.
7. Vijayasaradhi G. A fractional derivative approach for robust segmentation of blood vessels in digital fundus retinal images / G. Vijayasaradhi, S. Balasubramanian, V. Chandrasekaran // International Journal of Imaging Science and Engineering. – 2008. – Vol. 2, № 1. – P. 166-169.
8. Fractional differentiation for edge detection / B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup [et al.] // Elsevier Signal Processing. – 2003. – Vol. 83. – P. 2421-2432.
9. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
10. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – Вып. 1. – М. : Физматгиз, 1959. – 470 с.
11. Полякова М.В. Контурная сегментация изображений с помощью репагулярного вейвлет-преобразования в пространстве обобщенных функций / М.В. Полякова, В.Н. Крылов, Н.А. Гуляева // Электроника и связь. – Киев : НТУУ «КПИ», 2007. – № 6. – С. 2631.

М.В. Полякова
Регуляризація диференціювання з використанням репагулярного вейвлет-перетворення
У статті розглядається проблема регуляризації диференціювання зображень за допомогою репагулярного вейвлет-перетворення, для вирішення якої виконується представлення цього перетворення за допомогою інтегрування дробового порядку.

M.V. Polyakova
Regularization of Differentiation with the Use of Repagular Wavelet Transform
The paper is devoted to the problem of regularization of image differentiation by repagular wavelet transform for the decision of which this transform is expressed based on integration of fractional order.

Статья поступила в редакцию 19.07.2010.